

Груздов А. В.¹, Березин С. В.^{2,*},
Березин А. В.³, Березин П. В.⁴

*bkcr@bk.ru

¹ООО «РПХ», Уфа, Россия

²ООО «РПХ», Уфа, Россия

³ИП Березин А. В., Уфа, Россия

⁴АО «Уфанет», Уфа, Россия

Определена новая элементарная ультрарадикальная функция, названная в честь первого человека, приблизившегося к ней, Эрланда Самуэля Бринга. Показано, как получаются любые решения для любых трехчленов с помощью любых радикалов и ультрарадикальной функции. Показано, как соблюдаются замкнутые последовательности корней полинома, подобно замкнутой последовательности корней числа. Показано, что для степеней 2, 3, 4 степенные ряды ультрарадикальной функции представляют собой ряды реальных формул для корней многочленов. Показана внешняя структура формулы корня уравнения пятой степени. Показано, как определить внешнюю структуру формул корней многочленов и получить систему многочленов для определения их внутренней структуры. Показаны преимущества истинного значения комплексного натурального логарифма перед его главным значением. Предлагается более компактная запись формулы де Муавра для корней комплексных чисел. Выдвинута гипотеза о возможности параболической сходимости ряда, что не мешает использовать ряд, как для получения результата, так и для анализа исходной формулы.

Ключевые слова: степенной ряд, корень Бринга-Жеррара, вывод Глассера, корни трёхчленов любых степеней, формула Муавра для дробных степеней, замкнутые последовательности корней, граница схождения, степенной ряд композиций функций дробной степени, метод определения состава функций из его степенных рядов, получение ряда неизвестных композиций функций, истинное значение комплексного натурального логарифма

Введение

Как и предсказывал Глассер¹, авторам удалось создать ультрарадикал для любых трёхчленов, частным случаем которого является корень Бринга-Жеррара². Но если ранее считалось, что ультрарадикал задаёт единственный действительный корень трёхчлена, то авторы показали, что ультрарадикальными методами можно получать не только все корни трёхчлена, ультрарадикалом также можно получать и решения трёхчленов с комплексными степенями.

Авторы установили, что ряды формул корней трехчленов степени меньше 5 идентичны рядам соответствующих ультрарадикалов.

Авторы показали преимущества истинного значения комплексного натурального логарифма, над его главным значением. На примере решения трехчлена с комплексными степенями можно увидеть, как масштабируются значения логарифма в зависимости от целого числа $\#w$.

Оглавление

- I. Примеры ультрарадикального решения
- II. Степенной ряд функции Бринг
- III. Идентичность степенных рядов известных формул корней полиномов
- IV. Арифметический корень

Примеры ультрарадикального решения

Чтобы получить какой-нибудь корень трёхчлена $x^7 = 16x^3 + 2$ возьмите $v = \sqrt[4]{16}$ и умножьте его на функцию Бринга от него же, но в степени 7. $x = v * brn_4\left(\frac{1}{2v^7}\right)_{-3}$. Именно вот так просто находятся все решения любых трёхчленов. Но при этом существует возможность получать не какой-нибудь любой корень, а конкретный корень трёхчлена. Чтобы понять, чем один корень отличается от других, достаточно понять, как они получаются ультрарадикальными методами.

$$x^m = px^n + q, \quad t = m - n$$

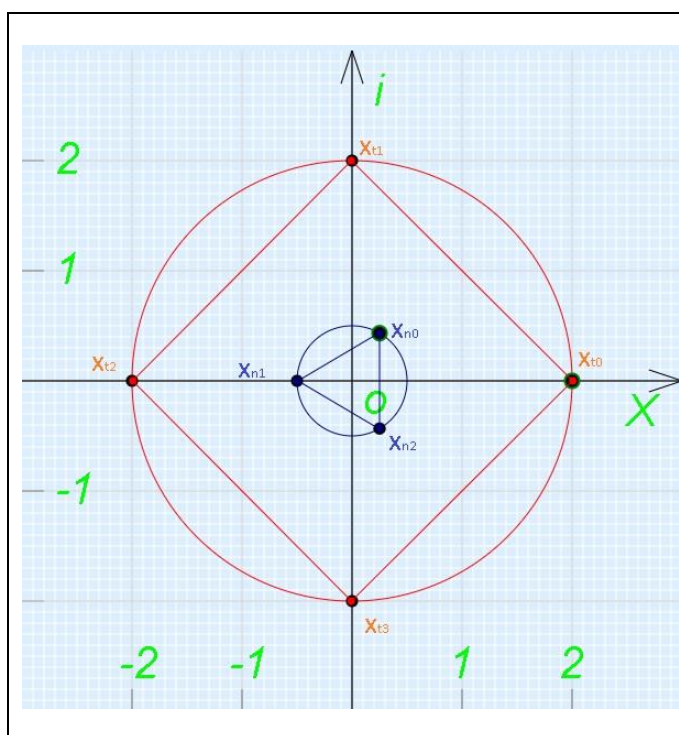
x можно найти тремя ультрарадикальными способами. Через $v_k = \sqrt[m]{|q|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k_i}{m}}$, через $v_k = \sqrt[t]{|p|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k_i}{t}}$, или через $v_k = \sqrt[n]{\left|-\frac{q}{p}\right|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k_i}{n}}$. В каждом из этих способов, все v_k являются корнями двучлена.

Эти корни являются вершинами правильного многоугольника, вписанного в окружность с центром в начале координат. Если радикал от положительного числа, то нулевой корень всегда будет положительным числом. Если радикал нечётной степени от отрицательного числа, то вещественным всегда будет средний корень. Понимая «радикальные правила» корней двучлена, мы можем заранее сказать, какой из корней нам нужен.

Точно также можно понять и «ультрарадикальные правила» корней трёхчленов. Степенной ряд ультрарадикальной функции показывает, что если ей подавать вещественные числа, то и она будет выдавать вещественные числа. Поэтому определять заранее какие корни у трёхчлена будут вещественными также легко, как и у двучлена.

Чтобы получить из корня двучлена, ультрарадикальное решение трёхчлена $x^m = px^n + q$ нужно умножить этот корень двучлена на функцию Бринга от него же, но в другой степени.

$$x_m = v * brn_m\left(\frac{p}{mv^t}\right)_n, v^m = q \quad x_t = v * brn_t\left(\frac{q}{tv^m}\right)_{-n}, v^t = p \quad x_n = v * brn_n\left(\frac{v^t}{np}\right)_m, v^n = -\frac{q}{p}$$



Рассмотрим пример решения трёхчлена, с целыми вещественными степенями $x^7 = 16x^3 + 2$. Это уравнение имеет 7 корней. Можно найти 4 корня с помощью радикала степени 4 $v_{tk} = \sqrt[t]{|p|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k_i}{t}} = \sqrt[4]{16} * e^{\frac{0+2\pi k_i}{4}}$, и остальные 3 корня с помощью радикала степени 3 $v_{nk} = \sqrt[n]{\left|-\frac{q}{p}\right|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k_i}{n}} = \sqrt[3]{1/8} * e^{\frac{\pi+2\pi k_i}{n}}$. На графике 1, корни двучленов обозначены черными точками, корни уравнения $x^7 = 16x^3 + 2$ обозначены цветами red и navy.

$$x_{tk} = v_{tk} * brn_t\left(\frac{q}{tv_{tk}^m}\right)_{-n} = v_{tk} * brn_4\left(\frac{1}{2v_{tk}^7}\right)_{-3}$$

$$x_{nk} = v_{nk} * brn_n\left(\frac{v_{nk}^t}{np}\right)_m = v_{nk} * brn_3\left(\frac{v_{nk}^4}{48}\right)_7$$

$$x^7 = 16x^3 + 2, \quad x_t = v_t * brn_4\left(\frac{1}{2v_t^7}\right)_{-3}, \quad v_t^4 = 16$$

x_{t0}	$v_{t0} = \sqrt[4]{16} * e^{\frac{0}{4}i} = 2$
	$R_{t0} = \frac{1}{2v_{t0}^7} = \frac{1}{2^8} = 0.00390625$
	$brn_4(0.00390625)_{-3} = 1.0038394314588936$
	$x_{t0} = v_{t0} * brn_4(R_{t0})_{-3} = 2.007678862917787$

x_{t1}	$v_{t1} = \sqrt[4]{16} * e^{\frac{0+2\pi}{4}i} = 2i$
	$R_{t1} = \frac{1}{2v_{t1}^7} = \frac{i}{2^8} = 0.00390625i$
	$brn_4(0.00390625i)_{-3} = 1.0000686010504813 + 0.0039043449886617i$
	$x_{t1} = v_{t1} * brn_4(R_{t1})_{-3} = -0.007808689977323307 + 2.0001372021009627i$
x_{t2}	$v_{t2} = \sqrt[4]{16} * e^{\frac{0+2\pi*2}{4}i} = -2$
	$R_{t2} = \frac{1}{2v_{t2}^7} = -\frac{1}{2^8} = -0.00390625$
	$brn_4(-0.00390625)_{-3} = 0.9960231120720321$
	$x_{t2} = v_{t2} * brn_4(R_{t2})_{-3} = -1.9920462241440642$
x_{t3}	$v_{t3} = \sqrt[4]{16} * e^{\frac{0+2\pi*3}{4}i} = -2i$
	$R_{t3} = \frac{1}{2v_{t3}^7} = -\frac{i}{2^8} = -0.00390625i$
	$brn_4(-0.00390625i)_{-3} = 1.0000686010504813 - 0.0039043449886617i$
	$x_{t3} = v_{t3} * brn_4(R_{t3})_{-3} = -0.007808689977323795 - 2.0001372021009627i$

$$x^7 = 16x^3 + 2, \quad x_n = v_n * brn_3\left(\frac{v_n^4}{48}\right), \quad v_n^3 = -\frac{1}{8}$$

x_{n0}	$v_{n0} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} * e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}/4}{2}i$
	$R_{n0} = \frac{v_{n0}^4}{48} = -\frac{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} * i\right)}{16 * 48} = -0,00065104166666667 - 0,00112763724451099i$
	$brn_3(-0,00065104166666667 - 0,00112763724451099i)_7 = 0.9993439831950751 - 0.0011188288017394i$
	$x_{n0} = v_{n0} * brn_3(R_{n0})_7 = 0.25032046288116 + 0.432448931082597i$
x_{n1}	$v_{n1} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} * e^{\frac{\pi+2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2}$
	$R_{n1} = \frac{v_{n1}^4}{48} = \frac{1}{16 * 48} = 0.0013020833333333333$
	$brn_3(0.0013020833333333333)_7 = 1.00131236916281$
	$x_{n1} = v_{n1} * brn_3(R_{n1})_7 = -0.5006561845814$
x_{n2}	$v_{n2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} * e^{\frac{\pi+2\pi*2}{3}i} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}/4}{2}i$
	$R_{n2} = \frac{v_{n2}^4}{48} = -\frac{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} * i\right)}{16 * 48} = -0,00065104166666667 + 0,00112763724451099i$
	$brn_3(-0,00065104166666667 + 0,00112763724451099i)_7 = 0.9993439831950751 + 0.0011188288017394i$
	$x_{n2} = v_{n2} * brn_3(R_{n2})_7 = 0.25032046288116 - 0.432448931082597i$

Рассмотрим пример с дробной степенью $x^5 = 3x^{1.5} + 32$. Также как и во всех ультрарадикальных методах, вначале получаем нужный корень числа. $v_k = \sqrt[5]{32} \left(\cos\left(\frac{0+2\pi k}{5}\right) + i * \sin\left(\frac{0+2\pi k}{5}\right) \right)$
Теперь нужно умножить этот корень на функцию Бринга от него же, но в степени $v_k^{3.5}$. Число в дробной степени имеет множество значений.

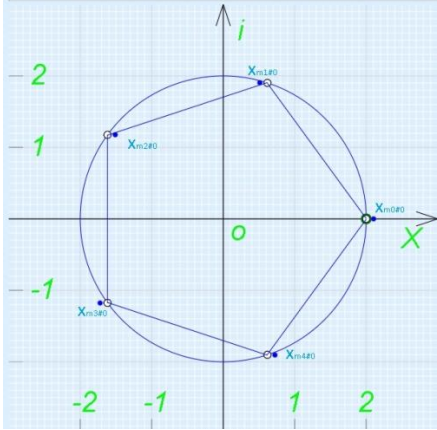
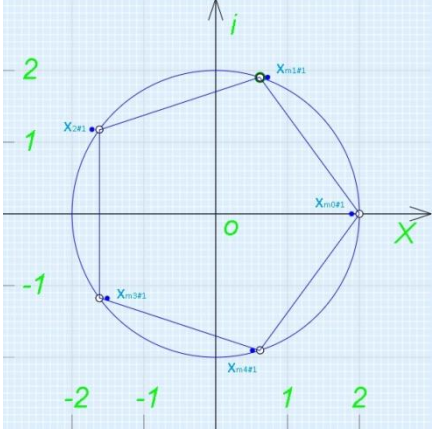
$$(a + bi)^{c\#w} = e^{c(\ln|a+bi| + \varphi i + 2\pi w i)}$$

$v_k^{3.5}$ будет иметь одинаковые значения каждые $2w$

Другими словами, в уравнении $x^5 = 3x^{1.5} + 32$, ультрарадикальным методом можно получить 2 ветки по 5 корней

$$x^5 = 3x^{1.5} + 32, x_m = v_m * brn_5\left(\frac{3}{5v_m^{3.5}}\right)_{1.5}, v_m^5 = 32$$

$$v_m^{3.5\#w} = e^{3.5(\ln|v_m| + \varphi i + 2\pi w i)}$$

	#0, #2, #4 ...	#1, #3, #5 ...
x_{m0}	$v_{m0} = \sqrt[5]{32} * e^{\frac{0}{5}i} = 2$	
	$v_{m0}^{3.5\#0} = e^{3.5(\ln 2 +0i+2\pi i*0)} = 11.31370849898$	$v_{m0}^{3.5\#1} = e^{3.5(\ln 2 +0i+2\pi i*1)} = -11.31370849898$
	$R_{m0\#0} = \frac{3}{5v_{m0}^{3.5\#0}} = 0.053033008588991$	$R_{m0\#1} = \frac{3}{5v_{m0}^{3.5\#1}} = -0.053033008588991$
	$brn_5(0.053033008588991)_{1.5} = 1.05158528848$	$brn_5(-0.053033008588991)_{1.5} = 0.94563384750$
	$x_{m0\#0} = v_{m0} * brn_5(R_{m0\#0})_{1.5} = 2.1031705769665283$	$x_{m0\#1} = v_{m0} * brn_5(R_{m0\#1})_{1.5} = 1.891267695009547$
x_{m1}	$v_{m1} = \sqrt[5]{32} * e^{\frac{0+2\pi i}{5}} = 0.6180339887498949 + 1.902113032590307i$	
	$v_{m1}^{3.5\#0} = -3.49612819559057 - 10.7599761914233i$	$v_{m1}^{3.5\#1} = 3.49612819559057 + 10.7599761914233i$
	$R_{m1\#0} = \frac{3}{5v_{m1}^{3.5\#0}} = -0.01638810091683 + 0.050437388397i$	$R_{m1\#1} = \frac{3}{5v_{m1}^{3.5\#1}} = -0.016388100916830798 - 0.0504373883972968i$
	$brn_5(-0.01638810091683 + 0.050437388397i)_{1.5} = 0.9847106045 + 0.05131189266i$	$brn_5(-0.01638810091683 - 0.050437388397i)_{1.5} = 1.01757453708863 - 0.049628657i$
	$x_{m1\#0} = v_{m1} * brn_5(R_{m1\#0})_{1.5} = 0.510983602923 + 1.90474336789i$	$x_{m1\#1} = v_{m1} * brn_5(R_{m1\#1})_{1.5} = 0.723294965976 + 1.90486959i$
	$x_{m2\#0} = v_{m2} * brn_5(R_{m2\#0})_{1.5} = -1.5097152115 + 1.17708552992i$	$x_{m2\#1} = v_{m2} * brn_5(R_{m2\#1})_{1.5} = -1.72178249335 + 1.17730157839i$
	$x_{m3\#0} = v_{m3} * brn_5(R_{m3\#0})_{1.5} = -1.72178249335 - 1.177301578i$	$x_{m3\#1} = v_{m3} * brn_5(R_{m3\#1})_{1.5} = -1.5097152115 - 1.17708552992i$
	$x_{m4\#0} = v_{m4} * brn_5(R_{m4\#0})_{1.5} = 0.723294965976 - 1.9048695915i$	$x_{m4\#1} = v_{m4} * brn_5(R_{m4\#1})_{1.5} = 0.510983602923 - 1.90474336789i$
		

Рассмотрим пример с комплексной степенью $x^5 = 3x^{2+0.3i} + 32$. Мы можем получить 5 корней с помощью радикала степени 5, когда будем находить $v_k = \sqrt[5]{|q|} * e^{\frac{\varphi+2\pi k}{5}i}$. Но когда мы подставляем в функцию Бринга $v^{3-0.3i}$, у нас появляется ещё один выбор, какое значение $v^{3-0.3i}$ вставить. $v^{3-0.3i}$ имеет множество значений.

$$(a + bi)^{(c+di)\#w} = e^{(c+di)(\ln|a+bi|+\varphi i+2\pi w i)} = \frac{e^{c*\ln|a+bi|}}{e^{d*(\varphi+2\pi w)}} e^{(d*\ln|a+bi|+c\varphi+2\pi w)i}$$

Увеличивая или уменьшая w , мы меняем и мнимую, и вещественную части результата. Это означает, что мы не только вращаем результат по окружности на плоскости комплексной области чисел, но и меняем радиус этой окружности. Образно выражаясь – побочно масштабируем результат.

Несколько столетий назад Муавр показал, что окружность корней двучлена имеет своеобразное начало. «Самое-самое прошлое». Мы можем брать любой угол. Делить его на любое число. Но этот результат никогда не вернётся в ещё более «прошлое» чем это начало. В математике сложилась традиция использовать главное значение логарифма $(-\pi; \pi]$. Если использовать этот диапазон, для обозначения одной ветки, то получится, что одни корни ветки масштабированы, а другие нет.

Авторы предлагают использовать адекватный диапазон – от «самого-самого прошлого» $[0; 2\pi)$. В этом случае, все корни одной ветки будут обозначаться одним целым числом $\#w$. Ветку с $\#w = 0$, можно называть истинным значением комплексного натурального логарифма. Значения с $\#w \neq 0$, можно называть масштабированными. С ростом этого числа, решения резко приближаются

к корням двучлена. Уже при #w=15, brn практически равна 1. То есть все решения такой ветки практически равны своим корням числа $\sqrt[5]{32}$. При отрицательных #w они удаляются настолько, что степенной ряд для некоторых решений расходится уже при #w=-1.

$$x^5 = 3x^{2+0.3i} + 32, \quad x = v * brn_5 \left(\frac{3}{5v^{3-0.3i}} \right)_{2+0.3i}, \quad v^5 = 32$$

	#w = -1	#w = 0
x_{m0}		$x_{m0\#0} = 2.144802239517 + 0.0334120451626065i$
x_{m1}		$x_{m1\#0} = 0.54874748513938 + 1.8272260736037i$
x_{m2}	$x_{m2\#-1} = -1.613342706911 + 1.66895489677594i$	$x_{m2\#0} = -1.6109463314351 + 1.2464743105597i$
x_{m3}	$x_{m3\#-1} = -1.4627223756377 - 1.4456020698021i$	$x_{m3\#0} = -1.5940218425876 - 1.217236317483i$
x_{m4}	$x_{m4\#-1} = 0.416313176424 - 1.80284912785277i$	$x_{m4\#0} = 0.587656052896365 - 1.88840057680634i$

function Bring

Степенной ряд функции Бринг очень похож на степенной ряд радикала, но если степенной ряд использует 2 величины – число и степень, то степенной ряд функции Бринг использует 3 величины – число и 2 степени. Также как и степенной ряд радикала, степенной ряд Бринга имеет ограниченную область сходимости, поэтому значение функции, также лучше получать другими способами. Но для исследования функции, её степенной ряд, конечно незаменим.

$$\begin{aligned}
 brn_B(R)_N &= \sum_{g=0}^{\infty} \frac{R^g}{g!} \prod_r^{[1;g]} (-Br + 1 + Ng) \\
 &= 1 + R + R \frac{(1-B+2N)R}{2} + R \frac{(1-B+3N)R}{2} \frac{(1-2B+3N)R}{3} \\
 &\quad + R \frac{(1-B+4N)R}{2} \frac{(1-2B+4N)R}{3} \frac{(1-3B+4N)R}{4} + \dots
 \end{aligned}$$

Если получать значение Бринга степенным рядом, то следует учитывать границу его области сходимости

$$\begin{aligned}
 x^m &= px^n + q, \quad t = m - n, \quad |m| > |n| \\
 |q^t m^m| &> |t^n p^m|, \quad x_m = v * brn_m \left(\frac{p}{m v^t} \right)_n, \quad v^m = q \\
 |q^t m^m| &\leq |t^n p^m|, \quad x_n = v * brn_n \left(\frac{v^t}{n p} \right)_m, \quad v^n = -\frac{q}{p}, \quad x_t = v * brn_t \left(\frac{q}{t v^m} \right)_{-n}, \quad v^t = p
 \end{aligned}$$

Если степени отрицательные или комплексные, то, при сравнении, нужно учитывать их знаки.

$$|q| \geq \left| sgn(m) |s| \left| \frac{pn}{sm} \right|^{\frac{m}{m-n}} - sgn(n) |p| \left| \frac{pn}{sm} \right|^{\frac{n}{m-n}} \right|, \quad |q| \geq \left| (m-n) e^{\frac{\ln((-n)^n (\frac{p}{m})^m)}{m-n}} \right|$$

В области m при приближении к границе, у степени $m > 3$, замечена параболическая сходимость, то есть некоторая часть членов возрастают. В таких местах получение значения Бринга, с высокой точностью, степенным рядом, затрудняется. И в алгоритме нужно отключать проверку на возрастание членов. Подробности можно исследовать на сайте лаборатория Бринга - <http://function-brn.online/>

Идентичность степенных рядов известных формул

Известные формулы корней полиномов $x^2 = px + q$, $x^3 = px + q$, $x^4 = px + q$ показывают, что их степенные ряды идентичны степенным рядам соответствующих функций Бринга.

$$\text{power series } \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \text{power series } \sqrt[2]{q} * \text{brn}_2 \left(\frac{p}{2\sqrt[2]{q}} \right)_1$$

$$x^3 = px + q, x_{k,g} = \sqrt[3]{A_g} + \frac{p}{3\sqrt[3]{A_g}}, A_g = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}$$

$$\text{power series } \sqrt[3]{A_g} + \frac{p}{3\sqrt[3]{A_g}} = \text{power series } \sqrt[3]{q} * \text{brn}_3 \left(\frac{p}{3\sqrt[3]{q}} \right)_1$$

$$x^4 = px + q, x_k = \sqrt[4]{A} + \frac{p}{4\sqrt[4]{A}} - \frac{p^2}{32\sqrt[4]{AB}}, B^3 + B^2q - 4P = 0, A - \sqrt[4]{A}^2 \sqrt[4]{B}^2 + P/4B^2 = 0$$

$$\text{power series } \sqrt[4]{A} + \frac{p}{4\sqrt[4]{A}} - \frac{p^2}{32\sqrt[4]{AB}} = \text{power series } \sqrt[4]{q} * \text{brn}_4 \left(\frac{p}{4\sqrt[4]{q}} \right)_1$$

$$m\sqrt[No]{a+bi} = \sqrt[m]{a^2+b^2} \left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{m}\right) + i * \sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{m}\right) \right)$$

a = 0	b = 0	$\varphi = 0$
	b > 0	$\varphi = \pi/2$
	b < 0	$\varphi = 3\pi/2$
a > 0	b ≥ 0	$\varphi = \text{atg}(b/a)$
	b < 0	$\varphi = \text{atg}(b/a) + 2\pi$
a < 0		$\varphi = \text{atg}(b/a) + \pi$

$$(a+bi)^{(c+di)\#w} = e^{(c+di)(\ln|a+bi|+\varphi i+2\pi w i)}$$

- link to scale

No - link to root

Если степени нельзя сократить, как в случае $x^4 + px^2 + q = 0$, $x^6 + px^2 + q = 0$, то ряд главной области сходимости раскладывается на m слагаемых. Если сокращение возможно, то слагаемых меньше в соответствующее число раз. Для трёхчленов стандартного вида $x^m + px^n + q = 0$

$$x_k = \sum_{j=0}^{m-1} L_j V_j^{\frac{1-tj}{m}}, \quad L_j = \left(\frac{-p}{m}\right)^j \prod_{r=1}^{j-1} \frac{1+nj-mr}{j!}$$

V_j - вспомогательные неизвестные, через которые определяется x_k в исходной формуле. У кубического уравнения $V_0 = V_1$. У формул корней полиномов степени 4, V_0 и V_2 можно выразить через V_1 .

$$x^5 + px + q = 0$$

$$x_k = \sqrt[5]{A} + \frac{-p}{5\sqrt[5]{B}^3} - \frac{p^2}{5^2\sqrt[5]{C}^7} + \frac{-p^3}{5^3\sqrt[5]{D}^{11}}$$

Используя взаимозависимость корней Муавра, по теореме Виета можно составлять системы полиномов для определения вспомогательных неизвестных V_j

$$x^4 + 4px + q = 0$$

$$x_k = a_k - \frac{p}{b_k^2} - \frac{p^2}{2c_k^5}, \quad a_k = \sqrt[4]{A}, b_k = \sqrt[4]{B}, c_k = \sqrt[4]{C}, \quad a_1 = ia_0, a_2 = -a_0, a_3 = -ia_0, a_0 = a$$

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = -4p \\ x_0x_1x_2x_3 = q \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \\ c^5 = ab^4 \\ 4a^2c^{10} + p^4 - 4b^2c^{10} = 0 \\ a^4b^8c^{20} - \frac{a^2b^8c^{10}p^4}{2} - 2ab^4c^{15}p^4 - c^{20}p^4 + \frac{b^8p^8}{16} + b^8c^{20}q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^4 = P \\ 4a^4b^8 - 4a^2b^{10} + P = 0 \\ a^8b^{16} + a^4b^8\left(-\frac{7P}{2} + b^8q\right) + \frac{P^2}{16} = 0 \\ b^4 = B \end{cases}$$

$$B^6 + 2B^5q + B^4q^2 - 8B^3P - 8B^2Pq + 16P^2 = (B^3 + B^2q - 4P)^2 = 0$$

Таким образом, можно составить формулу корней уравнения $x^4 + 4px + q = 0$

$$x_k = \sqrt[4]{\frac{N_0k}{A}} - \frac{p}{\sqrt[4]{\frac{N_0k}{B^2}}} - \frac{p^2}{2\sqrt[4]{\frac{N_0k}{AB^4}}}$$

$$B^3 + B^2q - 4P = 0$$

$$4a^4b^8 - 4a^2b^{10} + P = 0$$

В реальной формуле, чей степенной ряд мы использовали, используются определённые корни этих полиномов. То есть под корнем четвёртой степени находится композиция дробно-степенной функции – формула конкретного корня вспомогательных полиномов.

$$x^5 + 5px + q = 0$$

$$x_k = a_k - \frac{p}{b_k^3} - \frac{p^2}{c_k^7} - \frac{p^3}{d_k^{11}}, \quad a_1 = (0,30901699437494745 + 0,9510565162951535i)a_0, \\ a_2 = (-0,8090169943749473 + 0,5877852522924732i)a_0, \\ a_3 = (-0,8090169943749475 - 0,587785252292473i)a_0, \\ a_4 = (0,30901699437494723 - 0,9510565162951536i)a_0, \\ a_0 = a, b_0^3 = b, c_0^7 = c, d_0^{11} = d, p^5 = P$$

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_0x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \\ x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_1x_4 + x_0x_2x_3 + x_0x_2x_4 + x_0x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \\ x_0x_1x_2x_3 + x_0x_1x_2x_4 + x_0x_1x_3x_4 + x_0x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 = 5p \\ x_0x_1x_2x_3x_4 = -q \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = abc \\ -Pbc^2 - Pb^2d + ac^2d^2 - a^2b^2cd^2 = 0 \\ -P^2b^3c^2 + Pab^2c^2d^2 + Pa^2b^3c^3d - Pc^3d^2 + Pab^3d^3 + Pbcd^3 + a^3b^2c^3d^3 - b^3c^3d^3 = 0 \\ -P^3b^5c^5 + 5P^2b^4c^2d^4 + 5P^2ab^5c^3d^3 - 5P^2ab^4c^5d^2 - 5P^2b^3c^4d^3 - P^2b^5d^5 - 5Pa^3b^5c^4d^4 \\ - 5Pab^2c^4d^5 - 5Pa^2b^4c^3d^5 - 5Pa^2b^3c^5d^4 - Pc^5d^5 + a^5b^5c^5d^5 + b^5c^5d^5q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4b^3c^2 - a^3bc^3 + Pab^2 + Pc = 0 \\ a^6b^3c^4 + Pa^4b^4c + a^3(3Pb^2c^2 - b^4c^4) - Pa^2c^3 - P^2b = 0 \\ a^{10}b^5c^5 - 10Pa^7b^4c^3 - 10Pa^6b^2c^4 + a^5(-P^2b^5 - Pc^5 + b^5c^5q) \\ + 10P^2a^4b^3c - 10P^2a^3bc^2 - P^3 = 0 \\ X = bc, \quad Y = a^2b, \quad Z = a^3c \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y^2(XZ + P) - XZ^2 + PZ = 0 \\ Y^4(PX) + Y^2(-X^3Z + X^2Z^2 + 3PXZ - P^2) - PXZ^2 = 0 \\ Y^6(-P^2X) + Y^4(X^3Z^3 - 10PX^2Z^2 + 10P^2XZ) + Y^3(X^4Z^2q) \\ + Y^2(-10PX^2Z^3 - 10P^2XZ^2 - P^3Z) - PX^2Z^4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X^4Z^4 + Z^3(-X^5 + 3PX^3) - 6P^2X^2Z^2 + Z(P^2X^3 - 3P^3X) + P^4)^2 = 0 \\ X^{12}Z^{12} - 44PX^{11}Z^{11} + 474P^2X^{10}Z^{10} + Z^9(-X^{14}q^2 + 220P^3X^9) + 15P^4X^8Z^8 \\ + Z^7(3P^2X^{12}q^2 + 264P^5X^7) - 916P^6X^6Z^6 + Z^5(-3P^4X^{10}q^2 - 264P^7X^5) \\ + 15P^8X^4Z^4 + Z^3(P^6X^8q^2 - 220P^9X^3) + 474P^{10}X^2Z^2 + 44P^{11}XZ + P^{12} = 0 \end{cases}$$

$$w = XZ$$

$$\begin{cases} w^4 + w^3(-X^2 + 3P) + w^2(-6P^2) + w(P^2X^2 - 3P^3) + P^4 = 0 \\ w^{12} + w^{11}(-44P) + w^{10}(474P^2) + w^9(-X^5q^2 + 220P^3) + w^8(15P^4) \\ + w^7(3P^2X^5q^2 + 264P^5) - 916P^6w^6 + w^5(-3P^4X^5q^2 - 264P^7) + 15P^8w^4 \\ + w^3(P^6X^5q^2 - 220P^9) + 474P^{10}w^2 + 44P^{11}w + P^{12} = 0 \end{cases}$$

$$(X^{12} - (106P + q^4)X^{10} + 4375P^2X^8 - 87500P^3X^6 + 859375P^4X^4 - 3906250P^5X^2 + 9765625P^6)^2 = 0$$

$$(X^6 + 3 * 25X^4P - 25 * 25X^2P^2 + 5 * 25 * 25P^3)^2 = X^{10}(256P + q^4)$$

При $P = -q^4/4^4$, X – находится через кубическое уравнение.

Арифметический корень

$$x^m = px^n + q, \quad t = m - n, \quad |m| > |n|$$

$$|q^t m^m| > |t^n n^p|, \quad x_m = v * brn_m \left(\frac{p}{m v^t} \right)_n, \quad v^m = q$$

$$|q^t m^m| \leq |t^n n^p|, \quad x_n = v * brn_n \left(\frac{v^t}{n p} \right)_m, \quad v^n = -\frac{q}{p}, \quad x_t = v * brn_t \left(\frac{q}{t v^m} \right)_{-n}, \quad v^t = p$$

$$n = 0, \quad n^n = 0^0 = 1$$

$$x^m = p + q, \quad t = m$$

$$|q^m| > |p^m|, \quad x_m = v * brn_m \left(\frac{p}{m q} \right)_0, \quad v^m = q$$

$$|q^m| \leq |p^m|, \quad x_t = v * brn_m \left(\frac{q}{m p} \right)_0, \quad v^m = p$$

$$x = \sqrt[m]{p + q}$$

$$\sqrt[m]{p + q} = \sqrt[m]{q} * brn_m \left(\frac{p}{m q} \right)_0, \quad \sqrt[m]{\frac{p}{q} + 1} = \sqrt[m]{1} * brn_m \left(\frac{p}{m q} \right)_0$$

$$\begin{aligned} brn_m \left(\frac{p}{m q} \right)_0 &= brn_B(R)_0 = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{R^g}{g!} \prod_r^{[1;g]} (-Br + 1) \\ &= 1 + R + R \frac{(1-B)R}{2} + R \frac{(1-B)R(1-2B)R}{2 \cdot 3} + R \frac{(1-B)R(1-2B)R(1-3B)R}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &\quad \sqrt[m]{p + q} = \sqrt[m]{1} * brn_m \left(\frac{q}{m p} \right)_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} brn_m \left(\frac{q}{m p} \right)_0 &= brn_B(R)_0 = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{R^g}{g!} \prod_r^{[1;g]} (-Br + 1) \\ &= 1 + R + R \frac{(1-B)R}{2} + R \frac{(1-B)R(1-2B)R}{2 \cdot 3} + R \frac{(1-B)R(1-2B)R(1-3B)R}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ \sqrt[B/L]{R + 1} &= \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{r=0}^g (L + B - rB)}{(L + B)g!} \frac{R^g}{B^g} \right) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{R^g}{g! B^g} \prod_r^{[1;g]} (-Br + L) \end{aligned}$$

Заключение

Пользоваться абсолютным ультрарадикалом сложнее, чем радикалом. Но, когда необходимо получать такие решения, это не только проще, чем находить эти же решения методами итерации или любыми другими современными методами. Ультрарадикальные методы решений опираются на радикальные порядки корней. Что даёт возможность исследовать поведение комплексной линии на трёхмерном комплексном графике уравнения. Плоскость oXi на которой расположены точки комплексных корней, это лишь одна плоскость пространства $oXYi$. Если рисовать точки пересечения с каждой параллельной её плоскостью, но смотреть на график перпендикулярно плоскости oXY , будет виден не плоский вещественный график, а трёхмерный комплексный. Это позволит определять, в каких полиномиальных тождествах, какая взаимосвязь корней, существует. Другими словами, у трёхчлена, каждая линия уже наделяется каким-то своим характером,

отличающим её от других линий этого же графика. Получается, что на «эволюцию» линий влияет не степень полиномов, а количество членов.

Например, можно нарисовать график $y = x^3 + px + q$, мы получим одну линию на плоскости. Но можно нарисовать график из трёх линий $x_{k,g} = \sqrt[3]{\frac{-p}{3} + \sqrt{\left(\frac{y-q}{2}\right)^2 - \left(\frac{-p}{3}\right)^3}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{\frac{-p}{3} + \sqrt{\left(\frac{y-q}{2}\right)^2 - \left(\frac{-p}{3}\right)^3}}}$, $A_g = \sqrt[3]{\left(\frac{y-q}{2}\right)^2 - \left(\frac{-p}{3}\right)^3} + \frac{y-q}{2}$. График рисуется от -начальной, до у-конечной, у меняется только по вещественной части, чтобы получать точки пересечения только с плоскостями параллельными плоскости Ox_i .

Функция brn даёт аналитическое решение трёхчленов, с любыми степенями. Причём данные формулы обладают наглядной предсказуемостью результата, чем не могут похвастаться другие, известные сегодня аналитические решения полиномов. Не исключено, что дальнейшее исследование функции Бринга откроет новые горизонты математических возможностей.

Пользоваться записью $\sqrt[m]{z}$ проще, чем $\sqrt[m]{a^2 + b^2} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{m}\right) + i * \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{m}\right) \right)$. Формула корня квинтика показывает потребность в упорядочивании последовательности корней комплексного числа. Например, $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{8} \neq \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{8}$. Начиная с уравнения степени 5 и выше, корень использует 2 и более таких вспомогательных неизвестных, которые уже нельзя выразить друг через друга. То есть их нельзя решить простыми (ненумерованными) радикалами. В таких случаях требуются ссылки на конкретные корни числа. Но проще выразить их так $\sqrt[m]{z}$

Так как здесь приходится работать не с положительными числами, нельзя менять последовательность операций степени: $\sqrt[2]{-9^3} \neq \sqrt[2]{(-9)^3}$, $\sqrt[2]{-9^3} = -27i$, $\sqrt[2]{(-9)^3} = 27i$, $\frac{1}{i} = -i$

Список литературы

1. M. L. Glasser. The Quadratic Formula Made Hard: A Less Radical Approach to Solving Equations.
2. Jerrard, George Birch (1859). *An essay on the resolution of equations*. London, UK: Taylor and Francis.
3. § 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа. scask.ru
4. О. В. Бесов. *Лекции по математическому анализу. Часть 1.* — М.: МФТИ, 2004. — 325 с. Глава 16 Функциональные последовательности и ряды.

Gruzlov A.V.
Berezin S.V.
Berezin A.V.
Berezin P.V.
Ufa, Russia.
2022.06.24.

brn

function-brn.online