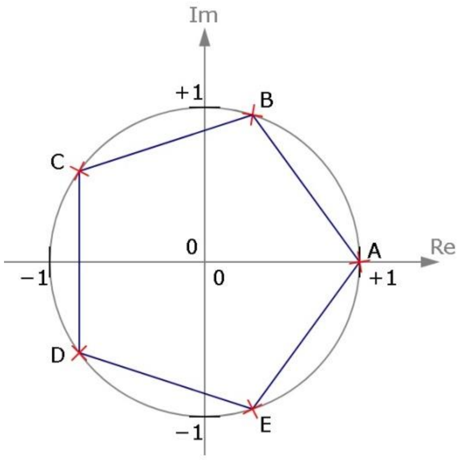
Analytical solution of polynomials
Аналитическое решение многочленов

The roots of a binomial belong to the same radical circle. And they are located exactly on it, at the same distance from each other.

Корни двучлена принадлежат одной радикальной окружности. И располагаются точно на ней, на одинаковом расстоянии друг от друга.

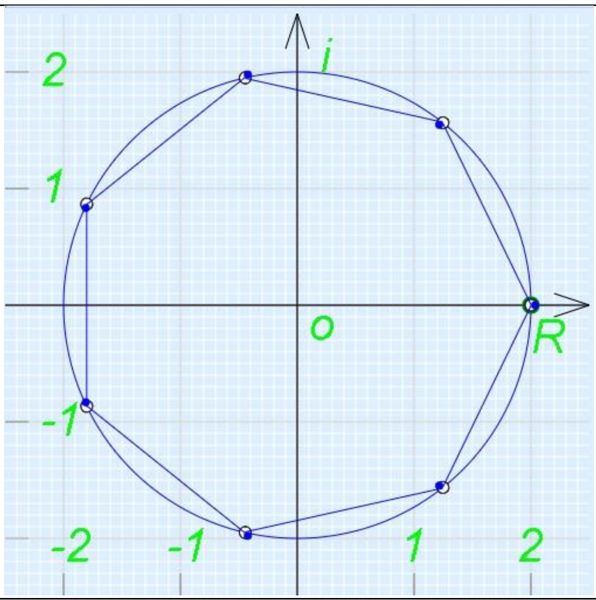
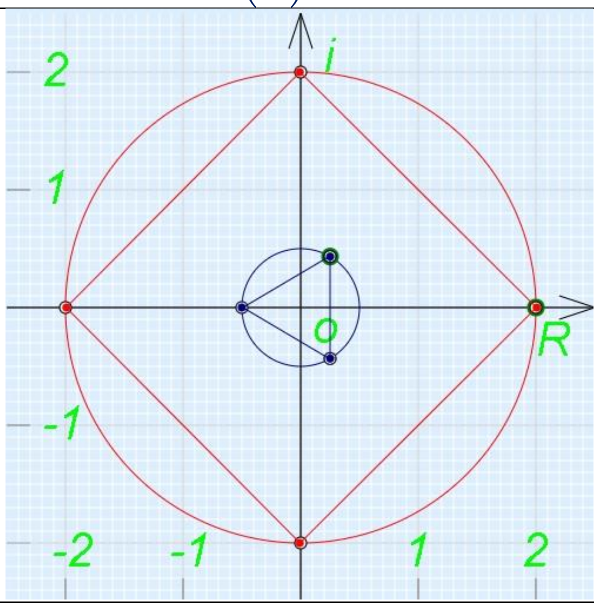
$$Fx^f + H = 0$$

$$x = \left(-\frac{H}{F}\right)^{1/f} = e^{\frac{Ln(-H/F)}{f}} = e^{\frac{\ln\left|\frac{H}{F}\right| + \left(\arg\left(-\frac{H}{F}\right) + 2\pi k\right)i}{f}}, \qquad k \in Z$$



The roots of a trinomial may belong to one or two other radical circles. They are no longer required to be located on these circles. The roots of the trinomials are removed from the roots of the binomials by a distance, which is determined by the proportionality of the Bring function.

Корни трёхчлена могут принадлежать одной или двум другим радикальным окружностям. Они уже не обязаны располагаться на этих окружностях. Корни трёхчленов удалены от корней двучленов на расстояние, которое определяется пропорциональностью функции Бринга.

$x^7 - 2x^3 - 128 = 0$ $x = v * brn_{7,3}\left(\frac{2}{v^4}\right), \qquad v = 128^{1/7}$	$x^7 - 16x^3 - 2 = 0$ $x = v * brn_{4,-3}\left(\frac{2}{v^7}\right), \qquad v = 16^{1/4}$ $x = v * brn_{3,7}\left(\frac{v^4}{16}\right), \qquad v = \left(\frac{-1}{8}\right)^{1/3}$
	

To determine which radical circles the roots of a trinomial belong to, a general algorithm is used.

Для определения, каким радикальным окружностям принадлежат корни трёхчлена, а заодно и для нахождения самих корней полинома, используется алгоритм общего вида.

$$Fx^f + Gx^g + Hx^h = 0$$
$$|f| > |g| > |h|$$
$$D = \frac{|F|^{|g-h|} * |H|^{|f-g|}}{|G|^{|f-h|}}, \qquad T = \frac{|g-h|^{|g-h|} * |f-g|^{|f-g|}}{|f-h|^{|f-h|}}$$

$B = f - h$	$v = \left(-\frac{H}{F}\right)^{1/B}$	$N = g - h$	$R = \frac{-G}{Fv^{B-N}}$	Blue	$D > T$
$B = f - g$	$v = \left(-\frac{G}{F}\right)^{1/B}$	$N = h - g$	$R = \frac{-H}{Fv^{B-N}}$	Red	$D \le T$
$B = g - h$	$v = \left(-\frac{H}{G}\right)^{1/B}$	$N = f - h$	$R = \frac{-F}{Gv^{B-N}}$	Navy	

$$z^{1/B} = e^{\frac{LnZ}{B}} = e^{\frac{\ln|Z| + (\arg(Z) + 2\pi k)i}{B}}, \qquad k \in Z$$
$$x = v * brn_{B,N}(R)$$
$$brn_{B,N}(R) = \sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{R^g}{B^g g!}\prod_{r=1}^{g-1}(-Br + 1 + Ng)\right)$$
$$= 1 + \frac{R}{B} + \frac{(1 - B + 2N)R^2}{2B^2} + \frac{(1 - B + 3N)(1 - 2B + 3N)R^3}{3!\,B^3}$$
$$+ \frac{(1 - B + 4N)(1 - 2B + 4N)(1 - 3B + 4N)R^4}{4!\,B^4} + \cdots$$
$$brn^a{}_{B,N}(R) = brn_{\frac{B}{a},\frac{N}{a}}(R)$$

If there are more than three terms, then there are more radical circles. Three colors do not designate them. In addition, starting from four terms, the roots are determined by complex multiplication. Consider the second question - what does fox or complex multiplication mean. Let's perform fox multiplication over two functions of the same name. In terms of a universal function, an ultraradical function is

Если членов более трёх, то и радикальных окружностей больше. Тремя цветами их не обозначить. Кроме того, уже начиная с четырёх членов, корни определяются комплексным умножением. Рассмотрим второй вопрос – что значит фокс или комплексное умножение. Произведём фокс умножение над двумя одноимёнными функциями. С точки зрения универсальной функции, ультрарадикальная функция – это

$$brn_{m,s}(x) = mat_{m,1,s}\left(\frac{x}{m}\right)$$

Given two universal functions

Даны две универсальные функции

$$mat_{m,t,s_1}x_1 = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{pro_{m,t,s_1(h)}{x_1}^h}{h!}\right)$$
$$= 1 + x_1 + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_1(3)}{x_1}^3}{3!} + \frac{pro_{m,t,s_1(4)}{x_1}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_1(5)}{x_1}^5}{5!} + \cdots$$

$$mat_{m,t,s_2}x_2 = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{pro_{m,t,s_2(h)}{x_2}^h}{h!}\right)$$
$$= 1 + x_2 + \frac{pro_{m,t,s_2(2)}{x_2}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!} + \frac{pro_{m,t,s_2(4)}{x_2}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_2(5)}{x_2}^5}{5!} + \cdots$$

$$pro_{m,t,s}h = \prod_{a=1}^{h-1}(-ma + t + hs)$$

m, s_1 and s_2 are powers or power differences. If you perform the usual multiplication on these two functions, these powers will be multiplied by each other. Fox multiplication gives a different result. Here, these powers are added, as in logarithmic operations. Otherwise, the power series of the result of fox multiplication behaves in the same way as the power series of the result of ordinary multiplication. We can say that fox multiplication is a hybrid of ordinary multiplication and logarithm. And this hybrid multiplication is constantly happening in many physical phenomena, regardless of the fact that we still do not know it!

m, s_1 и s_2 – это степени или разницы степеней. Если совершить обычное умножение над этими двумя функциями, эти степени умножатся друг на друга. Операция фокс-умножение даёт другой результат. Здесь эти степени складываются, как в логарифмических операциях. В остальном степенной ряд результата фокс-умножения ведёт себя так же, как и степенной ряд результата обычного умножения. Можно сказать, что фокс-умножение – это гибрид обычного умножения чисел и сложения степеней. Такое гибридное умножение постоянно происходит во многих физических явлениях, независимо от того, что мы до сих пор этого не знаем!

$$\begin{aligned}
&mat_{m,t,s_1}x_1[*]\,mat_{m,t,s_2}x_2\\
&\quad= \left(1 + x_1 + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_1(3)}{x_1}^3}{3!} + \frac{pro_{m,t,s_1(4)}{x_1}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_1(5)}{x_1}^5}{5!} + \cdots\right)[*]\left(1\right.\\
&\quad\left. + x_2 + \frac{pro_{m,t,s_2(2)}{x_2}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!} + \frac{pro_{m,t,s_2(4)}{x_2}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_2(5)}{x_2}^5}{5!} + \cdots\right)\\
&\quad= 1 + x_2 + \frac{pro_{m,t,s_2(2)}{x_2}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!} + \frac{pro_{m,t,s_2(4)}{x_2}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_2(5)}{x_2}^5}{5!} + \cdots + x_1\\
&\quad + x_1[*]x_2 + x_1[*]\frac{pro_{m,t,s_2(2)}{x_2}^2}{2} + x_1[*]\frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!} + x_1[*]\frac{pro_{m,t,s_2(4)}{x_2}^4}{4!}\\
&\quad + x_1[*]\frac{pro_{m,t,s_2(5)}{x_2}^5}{5!} + \cdots + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]x_2\\
&\quad + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]\frac{pro_{m,t,s_2(2)}{x_2}^2}{2} + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]\frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!}\\
&\quad + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]\frac{pro_{m,t,s_2(4)}{x_2}^4}{4!} + \frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]\frac{pro_{m,t,s_2(5)}{x_2}^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\frac{x_1^{h_1}}{h_1!}[*]\frac{x_2^{h_2}}{h_2!} = \frac{x_1^{h_1}x_2^{h_2}}{h_1!\,h_2!}$$

$$pro_{m,t,s}h = \prod_{a=1}^{h-1}(-ma + t + hs)$$

$$pro_{m,t,s_1(h_1)}[*]pro_{m,t,s_2(h_2)} = \prod_{a=1}^{h_1+h_2-1}(-ma + t + h_1s_1 + h_2s_2)$$

The last identity is valid when this product is part of the above series. It is this identity that makes it possible to implement an algorithm for determining the result of fox-multiplication of functions of the same name. For example, this is how the value of this member is defined

Последнее тождество справедливо, когда это произведение является частью вышеуказанного ряда. Именно это тождество позволяет реализовать алгоритм определения результата фокс-умножения одноимённых функций. Например, вот так определяется значение вот этого члена

$$\begin{aligned}
&\frac{pro_{m,t,s_1(2)}{x_1}^2}{2}[*]\frac{pro_{m,t,s_2(3)}{x_2}^3}{3!} = \frac{x_1^2x_2^3}{2*3!}\prod_{a=1}^{2+3-1}(-ma + t + 2s_1 + 3s_2)\\
&\quad= (-m + t + 2s_1 + 3s_2)(-2m + t + 2s_1 + 3s_2)(-3m + t + 2s_1 + 3s_2)(-4m + t + 2s_1\\
&\quad + 3s_2)\frac{x_1^2x_2^3}{2*3!}
\end{aligned}$$

Количество членов у произведения, гораздо больше. Но с требуемой точностью, их понадобится не намного больше. Значения числителей растут с одной скоростью, значения знаменателей с другой, гораздо большей скоростью. В знаменателе произведение факториалов. Да и переменная x меньше единицы. Тем не менее, операция фокс умножения требует намного больше ресурсов процессора.

Пока этот алгоритм реализован только на языке js. Ни BigDecimal, ни BigComplex, js так и не поддерживает. Пришлось городить целые огороды, чтобы реализовать этот алгоритм на js. Зато весь код открытый, посетитель может лично убедиться что ни его куки, ни его исследования никто не подсматривает. Никакие его расчёты, ни на какой сервер не отправляются. Но задержки в расчётах ощутимые. Например,

$$3x^{12}+2x^7+4x^3-20=0$$

$$v=\left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{1}{12}},\qquad m=12$$

$$s_1=7,\qquad R_1=\frac{-2}{3v^5}$$

$$s_2=3,\qquad R_2=\frac{-4}{3v^9}$$

$$x=v*\left(brn_{m,s_1}R_1[*]brn_{m,s_2}R_2\right)$$

Знак операции [*] мы не стали реализовывать. Здесь мы его показываем просто для понятности. Чтобы получить результат используйте параметры универсальной функции.

$$x=v*\left(brn_{m,s_1}R_1[*]brn_{m,s_2}R_2\right)=v*mat_{m,1,s_1,s_2}\left(\frac{R_1}{m},\frac{R_2}{m}\right)$$

v имеет 12 корней. $v=e^{\frac{\ln\left|\frac{20}{3}\right|+(0+2\pi k)i}{12}},\ k\in Z$

Возьмём корень v=1.171275507178513889

тогда

R1=-.3024220355415353372

R2=-.32137136757786069178

Я уменьшил требуемую точность до 15 цифр, и запустил формулу с этими параметрами. На стареньком Lenovo, расчёты заняли полторы секунды. А трёхчлен, решается обычным ультрарадикалом практически мгновенно.

Что касается определения радиуса сходимости для двух и более фокс множителей, вероятно проще и быстрее проверять каждый из них так, как если бы был только один фокс множитель. То есть, как и у функции с одним би-параметром. Ряд

$$mat_{m,t,s}x=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{x^h}{h!}\prod_{a=1}^{h-1}(-ma+t+hs)$$

сходится, когда

$$\left|s^{|s|}(m-s)^{|m-s|}x^{|m|}\right|\le 1$$

Как видно здесь нет параметра t. Значит, такая проверка будет работать не всегда. Поэтому калькулятор не запретит вам продолжать считать. Но он всё-таки выскажет своё мнение. Если ряд действительно не сходится, значит, этой окружности не принадлежит ни один корень многочлена. Вам нужно выбрать другие два члена, для определения v. И дальше уже исходить из его корней.

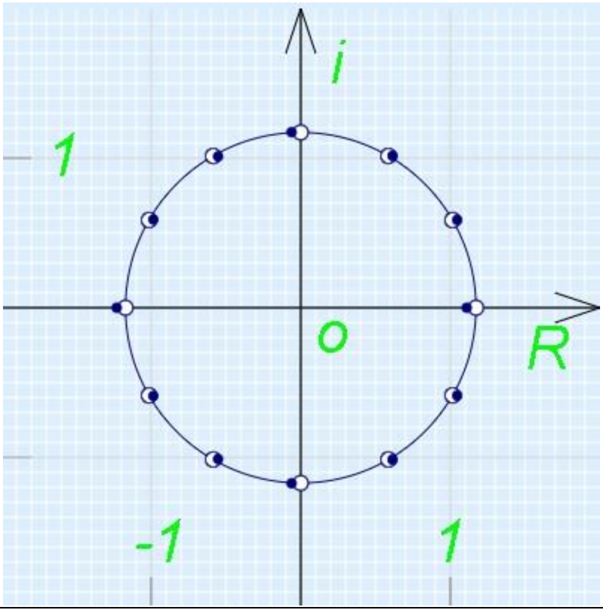
Сколько всего может быть окружностей, которым принадлежат какие-нибудь корни полинома. Окружность определяется двумя членами. Ax^a+Bx^b

$$v=\left(-\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{a-b}}$$

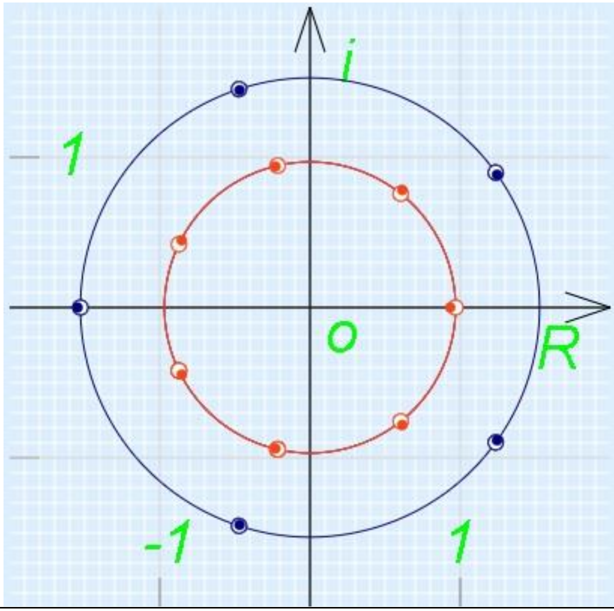
В уравнении $Ax^{12}+Bx^7+Cx^3+D=0$ четыре члена. Значит, может быть, следующее

1. Все 12 корней принадлежат одной радикальной окружности $\left(-\frac{D}{A}\right)^{\frac{1}{12}}$
2. 5 корней принадлежит окружности $\left(-\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{5}}$ и 7 корней принадлежат окружности $\left(-\frac{D}{B}\right)^{\frac{1}{7}}$
3. 5 корней принадлежит окружности $\left(-\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{5}}$, 4 корня окружности $\left(-\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{4}}$ и 3 корня окружности $\left(-\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{3}}$
4. 9 корней принадлежит окружности $\left(-\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{9}}$ и 3 корня окружности $\left(-\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{3}}$

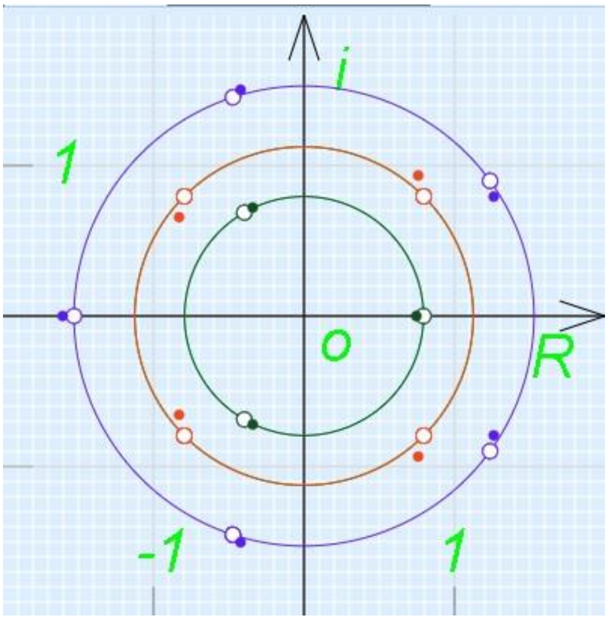
$3x^{12} + 2x^7 + 4x^3 - 20 = 0$



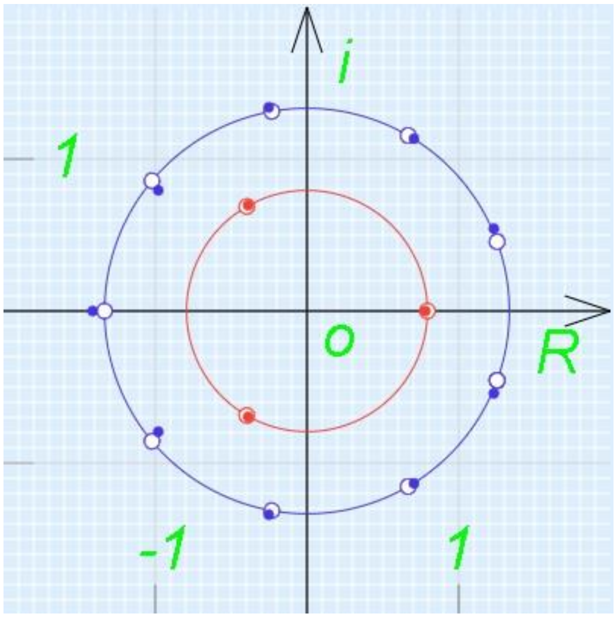
$3x^{12} + 25x^7 + 4x^3 - 20 = 0$



$3x^{12} + 25x^7 + 40x^3 - 20 = 0$



$3x^{12} + 5x^7 + 40x^3 - 20 = 0$



Чем дальше коэффициенты полинома от границы сходимости ряда, тем ближе корни полинома к корням своей радикальной окружности. И тем быстрее сходится ряд. В наборе Галактика-Платон есть рассмотренный выше пример. Посмотрите, с какой скоростью ваш компьютер рассчитает данное фокс умножение.

Мы начали свои экспедиции на полиномы, чтобы найти аналитическое решение многочленов. Теперь, когда найдены и ульрарадикальная функция, и операция гибрид умножения с логарифмированием, и в качестве бонуса найдена универсальная функция. Казалось бы, пора завязывать с этими экспедициями. Но внезапно появился такой вопрос. Если есть операция – гибрид умножения чисел и сложения степеней, может быть, существует и гибрид деления с чем-нибудь? Или что-нибудь другое, что будет обратным действием фокс умножению…

http://glax-plato.ru/

https://www.cyberforum.ru/blogs/784248/

Gruzdov A.V.
Berezin S.V.
Berezin A.V.
Berezin P.V.
Ufa, Russia.

2023.07.12